

MODEL PENUGASAN

Model penugasan merupakan bentuk khusus metode transportasi. Kasus yang dapat diselesaikan menggunakan model penugasan akan lebih mudah diselesaikan menggunakan metode penyelesaian yang ada pada model penugasan dibandingkan jika menggunakan metode transportasi. Seperti yang telah ditunjukkan namanya, kasus yang dapat diselesaikan dengan metode penugasan adalah kasus-kasus penugasan, seperti penugasan beberapa karyawan untuk menyelesaikan beberapa pekerjaan, atau beberapa mesin untuk menyelesaikan beberapa pekerjaan. Jika diselesaikan menggunakan metode transportasi, yang berperan sebagai sumber adalah pekerjaan (tugas), dan sebagai tujuan adalah mesin atau pekerja. Suplai pada semua sumber adalah 1, yaitu $a_i = 1$ untuk semua i . Hal yang sama juga terjadi pada tujuan, permintaan pada semua tujuan adalah 1, yaitu $b_j = 1$ untuk semua j . Karena x_{ij} menunjukkan penugasan, berarti nilainya hanya ada 2, yaitu nilai 0 atau 1.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerjaan } i \text{ ditugaskan ke pekerja (mesin) } j \\ 0, & \text{jika pekerjaan } i \text{ tidak ditugaskan ke pekerja (mesin) } j. \end{cases}$$

Tujuan optimasi adalah meminimumkan biaya penugasan atau memaksimumkan keuntungan dari penugasan.

Kita simbolkan x_{ij} sebagai variabel keputusan penugasan pekerja i ke pekerjaan j , c_{ij} sebagai biaya penugasan pekerja i ke pekerjaan j . Model umum pemrograman linearnya oleh karenanya adalah:

$$\text{Min/maks } z = \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

Terhadap $\sum x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n$

$\sum x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n$

$x_{ij} = 1$ atau 0

Perhatikan dalam model di atas, i sama dengan j karena asumsi dalam modelnya adalah jumlah pekerja sama dengan jumlah pekerjaan.

Penentuan Solusi Optimal

Penentuan solusi optimal dilakukan menggunakan metode Hungarian. Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode Hungarian adalah sebagai berikut:

1. Bentuk tabel penugasan. Letakkan pekerjaan sebagai baris dan pekerja (mesin) sebagai kolom. Jumlah baris = jumlah kolom, untuk memenuhi asumsi. Jika jumlah baris \neq jumlah kolom (pekerja \neq pekerjaan), maka diperlukan dummy. Jika jumlah pekerjaan $>$ jumlah pekerja, maka kita memerlukan dummy pekerja. Jika jumlah pekerjaan $<$ jumlah pekerja, maka kita memerlukan dummy pekerjaan. Berbeda dengan metode transportasi, jumlah dummy yang dibutuhkan tergantung dari selisih jumlah pekerjaan dengan jumlah pekerja, karena masing-masing pekerja dan pekerjaan bernilai 1. Di dalam tabel adalah biaya penugasan atau keuntungan penugasan.
2. Untuk setiap baris, kurangkan semua nilai dengan nilai terkecil (untuk tujuan minimisasi biaya) atau nilai terbesar (untuk tujuan maksimisasi) yang ada pada baris tersebut.
3. Periksa kolom, jika ada kolom yang belum memiliki nilai 0, kurangkan semua nilai pada kolom tersebut dengan nilai terkecil (untuk tujuan minimisasi) atau nilai terbesar (untuk tujuan maksimisasi) yang ada pada kolom yang bersangkutan.

4. Periksa apakah solusi layak optimal sudah diperoleh. Pemeriksaan dilakukan dengan menggambarkan garis-garis vertikal dan/atau horizontal seminimal mungkin yang melewati nilai 0. Jika jumlah garis yang terbentuk sama dengan jumlah baris/kolom, maka solusi layak optimal sudah diperoleh.
5. Jika solusi layak optimal belum diperoleh, kurangkan semua nilai yang tidak dilewati garis dengan nilai terkecil (untuk tujuan minimisasi) atau nilai terbesar (negatif terkecil untuk tujuan maksimisasi), dan tambahkan nilai terkecil/terbesar tersebut pada nilai yang terletak pada perpotongan garis. Nilai lainnya (yang dilewati garis tapi tidak terletak pada perpotongan) tidak berubah.
6. Kembali ke langkah 4.

Perhatikan kasus berikut. Suatu perusahaan mempekerjakan 7 tenaga penjual yang ditugaskan ke 7 daerah pemasaran. Biaya penugasan per bulan (dalam juta rupiah) ditunjukkan tabel berikut:

P E K E R J A A N	P E K E R J A							
		1	2	3	4	5	6	7
K	1	1.5	2	1	1.5	2	3	4
E	2	3	3	1.5	2	2.5	3	2
R	3	2	1	4	2	1	1	1
J	4	1.5	1.5	2	3	3	1	1.5
A	5	4	3	3	1.5	1.5	3	1
A	6	2	2	3	2	4	1.5	2
N	7	2.5	2.5	1.5	1	1.5	2	1.5

Tentukanlah penugasan optimal!!!

Penyelesaian:

Jumlah pekerjaan = jumlah pekerja, dengan demikian asumsi sudah dipenuhi.

1. Tabel penugasannya adalah:

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
1	1.5	2	1	1.5	2	3	4	
2	3	3	1.5	2	2.5	3	2	
3	2	1	4	2	1	1	1	
4	1.5	1.5	2	3	3	1	1.5	
5	4	3	3	1.5	1.5	3	1	
6	2	2	3	2	4	1.5	2	
7	2.5	2.5	1.5	1	1.5	2	1.5	

2. Pengurangan nilai terkecil pada setiap baris.

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
1	0.5	1	0	0.5	1	2	3	
2	1.5	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5	
3	1	0	3	1	0	0	0	
4	0.5	0.5	1	2	2	0	0.5	
5	3	2	2	0.5	0.5	2	0	
6	0.5	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5	
7	1.5	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5	

3. Kolom 1 belum memiliki nilai 0, nilai terkecil adalah 0.5

P E		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7

K	1	0	1	0	0.5	1	2	3
E	2	1	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5
R	3	0.5	0	3	1	0	0	0
J	4	0	0.5	1	2	2	0	0.5
A	5	2.5	2	2	0.5	0.5	2	0
A	6	0	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5
N	7	1	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5

4. Periksa kelayakan dan keoptimalan penugasan dengan menggambar garis vertikal/horizontal. Jika anda menggunakan prinsip menggambar seminimum mungkin garis baik vertikal ataupun horizontal yang melewati nilai 0, maka jumlah garis yang terbentuk tidak akan melebihi 6, seperti yang ditunjukkan tabel di bawah.

P		P E K E R J A						
E		1	2	3	4	5	6	7
K	1	0	1	0	0.5	1	2	3
E	2	1	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5
R	3	0.5	0	3	1	0	0	0
J	4	0	0.5	1	2	2	0	0.5
A	5	2.5	2	2	0.5	0.5	2	0
A	6	0	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5
N	7	1	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5

5. Jumlah garis yang terbentuk (6) tidak sama dengan jumlah baris/kolom (7), maka solusi optimal layak belum diperoleh. Nilai terkecil yang tidak dilalui oleh garis adalah 0.5.

P E K E R J A		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.5	0	0	0.5	2	2.5	
2	1	1	0	0	1	1.5	0	
3	1	0	4	1	0	1	0	
4	0	0	1	1	1	0	0	
5	3	2	2.5	0.5	0.5	3	0	
6	0	0	1	0	2	0	0	
7	1.5	1.5	1	0	0.5	1.5	0.5	

6. Periksa kelayakan dan keoptimalan. Jumlah garis (7) sama dengan jumlah baris/kolom, maka solusi layak optimal sudah diperoleh.

P E K E R J A		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.5	0	0	0.5	2	2.5	
2	1	1	0	0	1	1.5	0	
3	1	0	4	1	0	1	0	
4	0	0	1	1	1	0	0	
5	3	2	2.5	0.5	0.5	3	0	
6	0	0	1	0	2	0	0	
7	1.5	1.5	1	0	0.5	1.5	0.5	

Pembacaan solusi optimalnya adalah dengan mencoba menugaskan pekerja ke pekerjaan dengan nilai pada tabel optimal adalah 0. Berdasarkan nilai 0 pada tabel di atas, kita bisa membentuk diagram penugasan sebagai berikut:

Pekerja	Pekerjaan	Biaya
1	1, 4 atau 6	1.5, 1.5 atau 2
2	3, 4 atau 6	1, 1.5 atau 2
3	1 atau 2	1 atau 1.5
4	1, 2, 6 atau 7	1.5, 2, 2 atau 1
5	3	1
6	4 atau 6	1 atau 1.5
7	2, 3, 4, 5 atau 6	2, 1, 1.5, 1 atau 2

Penugasan terakhir kita mulai dari tabel yang hanya memiliki satu penugasan, untuk kasus di atas adalah pekerja 5 untuk pekerjaan 3. Karena pekerjaan 3 sudah ditugaskan ke pekerja 5, maka pekerjaan 3 harus dihapus dari pekerja 2 dan 7. Selanjutnya kita bisa lihat pekerjaan yang dapat ditugaskan ke pekerja 2 dan 6, yaitu pekerjaan 4 atau 6. dalam hal ini, solusi tidak akan berbeda kalau kita menugaskan pekerjaan 4 ke pekerja 2 dan pekerjaan 6 ke pekerja 6 atau sebaliknya. Dengan menugaskan pekerjaan 4 dan 6 ke pekerja 2 dan 6, maka pekerja 1 harus ditugaskan untuk menyelesaikan pekerjaan 1. karena pekerjaan 1 telah ditugaskan ke pekerja 1, maka pekerja 3 akan ditugaskan ke pekerjaan 2. Pekerjaan 1, 2 dan 6 telah ditugaskan ke pekerja 1, 3 dan 6 atau 2, maka pekerja 4 akan ditugaskan ke pekerja 7, dan pekerja 7 akan ditugaskan ke pekerjaan 5. Dengan demikian, kemungkinan penugasan tenaga penjual untuk meminimumkan total biaya penugasan ada dua pilihan, seperti yang ditunjukkan tabel di bawah. Total biaya penugasan adalah Rp. 9 juta.

Kemungkinan 1			Kemungkinan 2		
Tenaga penjual	daerah	Biaya	Tenaga penjual	daerah	Biaya

Angka yang ada di dalam kotak menunjukkan biaya penugasan. Total biaya penugasan minimum dengan demikian adalah 9 juta rupiah.

Penggunaan Big M Dan Dummy

Jika jumlah daerah pemasaran untuk kasus di atas bukan hanya 7 tapi 9, sedangkan jumlah tenaga penjual tetap 7, maka kita memerlukan dummy tenaga penjual. Biaya yang diperoleh per bulan (dalam ratus ribu rupiah) jika menugaskan masing-masing tenaga penjual ke masing-masing daerah penjualan ditunjukkan oleh tabel di bawah ini.

P E K E R J A	P E K E R J A							
		1	2	3	4	5	6	7
1	4	3	4	5	3	2	1	
2	2	3	1	4	5	3	2	
3	4	3	2	5	3	4	4	
4	2	3	4	2	3	3	2	
5	4	3	4	2	2	4	3	
6	1	2	1	3	1	2	3	
7	2	1	4	1	1	4	1	
8	2	3	1	4	2	5	1	
9	2	4	2	3	2	2	3	

Tentukanlah penugasan optimal!!!

Penyelesaian:

Jumlah pekerjaan > jumlah pekerja, maka kita memerlukan dummy pekerja. Jumlah dummy pekerja yang dibutuhkan adalah $9-7=2$

1. Tabel penugasannya adalah:

		P E K E R J A							

		1	2	3	4	5	6	7	D ₁	D ₂
P	1	4	3	4	5	3	2	1	0	0
E	2	2	3	1	4	5	3	2	0	0
K	3	4	3	2	5	3	4	4	0	0
E	4	2	3	4	2	3	3	2	0	0
R	5	4	3	4	2	2	4	3	0	0
J	6	1	2	1	3	1	2	3	0	0
A	7	2	1	4	1	1	4	1	0	0
A	8	2	3	1	4	2	5	1	0	0
N	9	2	4	2	3	2	2	3	0	0

2. terhadap kolom, krn setiap baris sudah memiliki nilai 0.

		P E K E R J A								
		1	2	3	4	5	6	7	D ₁	D ₂
P	1	3	2	3	4	2	0	0	0	0
E	2	1	2	0	3	4	1	1	0	0
K	3	3	2	1	4	2	2	3	0	0
E	4	1	2	3	1	2	1	1	0	0
R	5	3	2	3	1	1	2	2	0	0
J	6	0	1	0	2	0	0	2	0	0
A	7	1	0	3	0	0	2	0	0	0
A	8	1	2	0	3	1	3	0	0	0
N	9	1	3	1	2	1	0	2	0	0

3. Periksa kelayakan dan keoptimalan penugasan dengan menggambar garis vertikal/horizontal. Jika anda menggunakan prinsip menggambar seminimum mungkin garis baik vertikal ataupun horizontal yang melewati nilai 0,

maka jumlah garis yang terbentuk tidak akan melebihi 9, seperti yang ditunjukkan tabel di bawah.

		P E K E R J A								
		1	2	3	4	5	6	7	D ₁	D ₂
P E K E R J A A N	1	3	2	3	4	2	0	0	0	0
	2	1	2	0	3	4	1	1	0	0
	3	3	2	1	4	2	2	3	0	0
	4	1	2	3	1	2	1	1	0	0
	5	3	2	3	1	1	2	2	0	0
	6	0	1	0	2	0	0	2	0	0
	7	1	0	3	0	0	2	0	0	0
	8	1	2	0	3	1	3	0	0	0
	9	1	3	1	2	1	0	2	0	0

4. Jumlah garis yang terbentuk (7) tidak sama dengan jumlah baris/kolom (9), maka solusi optimal layak belum diperoleh.
5. Selanjutnya kurangkan semua nilai yang tidak dilalui garis dengan nilai terkecil dan tambahkan nilai terkecil tersebut ke nilai yang terletak pada perpotongan garis. Nilai terkecil yang berada di luar garis pada tabel di atas adalah 1. lalu periksa keoptimalan dengan membentuk garis horizontal atau vertikal.

		P E K E R J A								
		1	2	3	4	5	6	7	D ₁	D ₂
P E K E R J A A N	1	2	1	3	3	1	0	0	0	0
	2	0	1	0	2	3	1	1	0	0
	3	2	1	1	3	1	2	3	0	0
	4	0	1	3	0	1	1	1	0	0
	5	2	1	3	0	0	2	2	0	0
	6	0	1	1	2	0	1	3	1	1
	7	1	0	4	1	0	3	1	1	1
	8	0	1	0	2	0	3	0	0	0
	9	0	2	1	1	0	0	2	0	0

6. Tabel sudah optimal, karena garis yang terbentuk sebanyak 9.

Solusi optimalnya adalah:

Pekerjaan	Pekerja	Keuntungan	Pekerjaan	Pekerja	Keuntungan
1	4	5	1	4	5
2	3	5	2	5	5
3	D ₂	3	3	7	4
4	D ₁	0	4	3	4
5	1	4	5	1	4
6	D ₂	0	6	D ₁	0
7	3	4	7	D ₂	0
8	7	5	8	6	5
9	6	4	9	2	4
Total		31	Total		31

Bayangkan misalnya bahwa satu ada dua orang dari para penjual itu tidak dapat ditugaskan ke kota/faerah pemasaran tertentu, maka kita menggunakan metode Big M. Jika manajemen telah memutuskan tidak akan menugaskan tenaga penjual 2 ke daerah penjualan 5 karena berdasarkan pengamalan dia selalu gagal di daerah itu, maka kita memerlukan metode big M. Data-data yang kita gunakan data biaya penugasan 7 tenaga penjual ke 7 daerah pemasaran seperti yang dapat anda lihat di bawah ini. Tanda - pada sel 52 menunjukkan bahwa kita tidak mungkin menugaskan tenaga penjual 2 ke daerah pemasaran 5.

		T E N A G A P E N J U A L						
		1	2	3	4	5	6	7
D A E R A H	1	1.5	2	1	1.5	2	3	4
	2	3	3	1.5	2	2.5	3	2
	3	2	1	4	2	1	1	1
	4	1.5	1.5	2	3	3	1	1.5
	5	4	-	3	1.5	1.5	3	1
	6	2	2	3	2	4	1.5	2
	7	2.5	2.5	1.5	1	1.5	2	1.5

Menggunakan metode Hungarian dalam model penugasan, akan kita bentuk tabel awal penugasan berikut:

P E K E R J A		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
P E K E R J A	1	1.5	2	1	1.5	2	3	4
	2	3	3	1.5	2	2.5	3	2
	3	2	1	4	2	1	1	1
	4	1.5	1.5	2	3	3	1	1.5
	5	4	M	3	1.5	1.5	3	1

A	6	2	2	3	2	4	1.5	2
N	7	2.5	2.5	1.5	1	1.5	2	1.5

Iterasi-1:

➤ Terhadap baris

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	0.5	1	0	0.5	1	2	3
	2	1.5	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5
	3	1	0	3	1	0	0	0
	4	0.5	0.5	1	2	2	0	0.5
	5	3	M	2	0.5	0.5	2	0
	6	0.5	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5
	7	1.5	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5

➤ Terhadap kolom:

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	0	1	0	0.5	1	2	3
	2	1	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5
	3	0.5	0	3	1	0	0	0
	4	0	0.5	1	2	2	0	0.5
	5	2.5	M	2	0.5	0.5	2	0
	6	0	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5
	7	1	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5

➤ Penarikan garis lurus (pemeriksaan keoptimalan)

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
K	1	0	1	0	0.5	1	2	3
E	2	1	1.5	0	0.5	1.5	1.5	0.5
R	3	0.5	0	3	1	0	0	0
J	4	0	0.5	1	2	2	0	0.5
A	5	2.5	M	2	0.5	0.5	2	0
A	6	0	0.5	1.5	0.5	2.5	0	0.5
N	7	1	1.5	0.5	0	0.5	1	0.5

Iterasi-2:

➤ Nilai terkecil: 1

P E K E R J A A N		P E K E R J A						
		1	2	3	4	5	6	7
K	1	0	0.5	0	0	0.5	2	2.5
E	2	1	1	0	0	1	1.5	0
R	3	1	0	4	1	0	1	0
J	4	0	0	1	1	1	0	0
A	5	3	2	2.5	0.5	0.5	3	0
A	6	0	0	1	0	2	0	0
N	7	1.5	1.5	1	0	0.5	1.5	0.5

➤ Penarikan garis lurus

P E K E R J A A N	P E K E R J A							
		1	2	3	4	5	6	7
K	1	0	0.5	0	0	0.5	2	2.5
E	2	1	1	0	0	1	1.5	0
R	3	1	0	4	1	0	1	0
J	4	0	0	1	1	1	0	0
A	5	3	M	2.5	0.5	0.5	3	0
A	6	0	0	1	0	2	0	0
N	7	1.5	1.5	1	0	0.5	1.5	0.5

➤ Solusi optimal

Kemungkinan 1			Kemungkinan 2		
Tenaga penjual	daerah	Biaya	Tenaga penjual	daerah	Biaya
1	1	1.5	1	1	1.5
2	4	1.5	2	6	2
3	2	1.5	3	2	1.5
4	7	1	4	7	1
5	3	1	5	3	1
6	6	1.5	6	4	1
7	5	1	7	5	1
Total		9	Total		9

Biaya total penugasan sama dengan 9 juta rupiah.