

METODE SIMPLEX

Metode Simplex

Metode Simplex adalah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan manajerial yang telah diformulasikan terlebih dahulu ke dalam persamaan matematika program linear yang mempunyai variable keputusan **lebih besar atau sama dengan dua**.

Dalam metode ini, model kita ubah ke dalam bentuk suatu table kemudian dilakukan langkah – langkah matematis ke dalam table tersebut. Langkah – langkah matematis ini pada dasarnya merupakan replikasi proses pemindahan dari suatu titik ekstrim ke titik ekstrim lainnya pada daerah batas solusi.

Untuk mencari nilai optimum dengan menggunakan metode simpleks ini dilakukan proses pengulangan (iterasi) dimulai dari penyelesaian dasar awal yang layak (feasible) hingga penyelesaian dasar akhir yang layak dimana nilai fungsi tujuan telah optimum.

Ada beberapa istilah yang sangat sering digunakan dalam metode simpleks, diantaranya :

1. **Iterasi** adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. **Variabel non basis** adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
3. **Variabel basis** merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel slack (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan \leq) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan \geq atau $=$). Secara umum, jumlah variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).

4. **Solusi atau nilai kanan** merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5. **Variabel slack** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan \leq menjadi persamaan ($=$). Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel slack akan berfungsi sebagai variabel basis.
6. **Variabel surplus** adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan \geq menjadi persamaan ($=$). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel surplus tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.
7. **Variabel buatan** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk \geq atau $=$ untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.
8. **Kolom pivot (kolom kerja)** adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
9. **Baris pivot (baris kerja)** adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.
10. **Elemen pivot (elemen kerja)** adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi dasar perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.
11. **Variabel masuk** adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu dari antara variabel non basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai positif.
12. **Variabel keluar** adalah variabel yang keluar dari variabel basis pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu dari antara variabel basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Persyaratan Metode Simpleks

Terdapat tiga persyaratan untuk memecahkan masalah pemrograman linear dengan menggunakan metode simpleks, yaitu :

1. Semua kendala pertidaksamaan harus dinyatakan sebagai persamaan.

Kebanyakan masalah pemrograman linear mengandung kendala – kendala yang berbentuk pertidaksamaan linear. Sebelum kita pecahkan dengan metode simpleks pertidaksamaan linear ini harus dinyatakan kembali sebagai persamaan linear.

Terdapat 3 tanda yang mungkin pada kendala, yaitu :

- ❖ Untuk tanda lebih kecil atau sama dengan (\leq)

Setiap kendala yang mempunyai tanda lebih kecil atau sama dengan (\leq) harus ditambahkan dengan "variabel *slack*" non negatif di sisi kiri kendala. Variabel ini berfungsi menyeimbangkan kedua sisi persamaan.

Contoh :

Misalkan, tiga persamaan berikut menunjukkan suatu fungsi kendala :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + x_2 \leq 76$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 27$$

Perubahan ketiga kendala tersebut adalah dengan menambahkan variabel *slack* pada sisi kiri setiap kendala, ketiga kendala tersebut menjadi :

$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 24$$

$$2x_1 + x_2 + S_2 = 76$$

$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 27$$

- ❖ Untuk tanda lebih besar atau sama dengan (\geq)

Untuk setiap kendala yang mempunyai tanda lebih besar atau sama dengan (\geq) harus dikurangkan dengan "variabel surplus" non negatif di sisi kiri kendala. Variabel ini bertindak sama dengan variabel *slack* yaitu menjaga kedua sisi persamaan seimbang. Selain mengurangkan variabel surplus harus menambahkan lagi dengan variabel buatan "artificial variable" di sisi kiri kendala. Variabel ini tidak mempunyai arti yang nyata (real)

dalam masalah ini, variabel ini hanya berfungsi memberikan kemudahan untuk memulai penyelesaian awal dari metode simpleks.

Contoh :

Misalkan persamaan berikut menunjukkan suatu fungsi kendala :

$$20x_1 + 15x_2 \geq 900$$

Sebelum kita memecahkan dengan metode simpleks, persamaan tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan berikut :

$$20x_1 + 15x_2 - S_1 + S_2 = 900$$

❖ Untuk tanda sama dengan (=)

Untuk setiap kendala yang mempunyai tanda sama dengan (=) harus ditambahkan variabel buatan "artificial variable" di sisi kiri kendala.

Contoh :

Misalkan persamaan berikut menunjukkan suatu fungsi kendala :

$$4x_1 + 2x_2 = 300$$

Sebelum kita memecahkan dengan metode simpleks, persamaan tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan berikut :

$$4x_1 + 2x_2 + S_1 = 300$$

2. Sisi kanan (*the right side*) dari sebuah kendala tidak boleh ada yang negatif.

Jika sebuah kendala bernilai negatif di sisi kanan, maka kendala dapat dikalikan dengan (-1) untuk membuat sisi kanan positif.

Contoh :

Misalkan dua persamaan berikut menunjukkan suatu fungsi kendala :

$$x_1 + 5x_2 \geq -150$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq -175$$

Maka bila dikalikan dengan (-1) akan menghasilkan :

$$-x_1 - 5x_2 \leq 150$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 175$$

Perhatikan bahwa tanda pertidaksamaan setiap kendala berubah. Hal ini dikarenakan bahwa tanda pertidaksamaan telah dikalikan dengan (-1) . Tanda pertidaksamaan akan berubah dari tanda \leq menjadi \geq atau sebaliknya tanda \geq menjadi \leq .

3. Nilai kanan (NK/RHS) fungsi tujuan harus nol.

Contoh :

Fungsi tujuan : maksimumkan $Z = 3x_1 + 2x_2$ diubah menjadi $Z - 3x_1 - 2x_2 = 0$

Algoritma Metode Simpleks

Untuk mencari nilai optimal dari suatu pemrograman linear dengan menggunakan metode simpleks, terdapat langkah – langkah/algorithm untuk penyelesaiannya.

Dengan menggunakan contoh berikut ini, akan dijabarkan langkah penyelesaian program linear dengan menggunakan metode simpleks.

Contoh :

- Fungsi Tujuan

Maksimumkan $Z = 3x_1 + 5x_2$

- Fungsi Kendala

$$2x_1 \leq 8$$

$$3x_2 \leq 15$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

Langkah Penyelesaian :

1. Ubah fungsi tujuan dan fungsi kendala ke dalam bentuk standar/implisit.

$$\text{Fungsi tujuan : } Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$\text{Fungsi kendala : } 2x_1 + S_1 = 8$$

$$3x_2 + S_2 = 15$$

$$6x_1 + 5x_2 + S_3 = 30$$

2. Susun semua nilai ke dalam tabel simpleks

VD	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	2	0	1	0	0	8
S ₂	0	0	3	0	1	0	15
S ₃	0	6	5	0	0	1	30

3. Tentukan kolom kunci (variabel keputusan) yang masuk sebagai variabel basis (*entering variabel*)

Kolom kunci adalah kolom yang mempunyai nilai pada baris Z (fungsi tujuan) yang bernilai negatif (-) dengan angka terbesar.

VD	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S ₁	0	2	0	1	0	0	8
S ₂	0	0	3	0	1	0	15
S ₃	0	6	5	0	0	1	30

Keterangan :

Kolom **berwarna kuning** (kolom x₂) dipilih sebagai kolom kunci.

4. Tentukan baris kunci, untuk menentukan variabel yang akan keluar dari baris kunci (*leaving variable*).

Baris kunci adalah baris dengan nilai indeks positif terkeci, dengan perhitungan indeks sebagai berikut.

$$\text{Indeks} = \frac{\text{Nilai kanan (NK)}}{\text{Nilai setiap baris pada kolom kunci}}$$

VD	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK	Indeks
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S ₁	0	2	0	1	0	0	8	~
S ₂	0	0	3	0	1	0	15	5
S ₃	0	6	5	0	0	1	30	6

Keterangan :

- Indeks pada baris Z tidak perlu dihitung.
- Indeks pada baris S_1 diperoleh dari 8 dibagi 0 = ~
- Indeks pada baris S_2 diperoleh dari 15 dibagi 3 = 5
- Indeks pada baris S_3 diperoleh dari 30 dibagi 5 = 6
- Baris berwarna hijau (baris S_2) dipilih sebagai baris kunci.

5. Mengubah nilai – nilai pada baris kunci dengan cara membaginya dengan angka kunci.

Angka kunci merupakan nilai yang posisinya berada pada perpotongan antara kolom kunci dengan baris kunci.

$$\text{Nilai baru baris kunci} = \frac{\text{Nilai lama baris kunci}}{\text{Angka kunci}}$$

Dari tabel simpleks pada langkah 4) diperoleh :

VD	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S_1	0	2	0	1	0	0	8	~
S_2	0	0	3	0	1	0	15	5
S_3	0	6	5	0	0	1	30	6

- Angka kunci adalah 3 (angka dengan text merah)
- Variabel kolom kunci (variabel X_2) akan menggantikan tempat variabel baris kunci (variabel S_2), perhatikan sel yang berwarna merah.
- Untuk mencari nilai baris kunci baru maka nilai – nilai pada baris kunci (sel dengan warna hijau) dibagi dengan angka kunci (3, angka dengan text merah).

Diperoleh nilai baris kunci baru sebagai berikut.

VD	Z	X_1	S_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S_1	0	2	0	1	0	0	8	~
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5	5
S_3	0	6	5	0	0	1	30	6

Nilai baru baris kunci adalah yang diberi warna biru.

6. Membuat baris baru dengan mengubah nilai – nilai baris (selain baris kunci) sehingga nilai – nilai kolom kunci = 0, dengan mengikuti perhitungan sebagai berikut :

Nilai baris baru = nilai baris lama – (KAKK x NBBK)

- KAKK = Koefisien Angka Kolom Kunci (nilai setiap baris kolom kunci)
- NBBK = Nilai Baru Baris Kunci

Dari tabel simpleks sebelumnya telah diketahui KAAK dan NBBK, seperti yang tertera dalam tabel berikut

VD	Z	X ₁	S ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK	Indeks
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
S ₁	0	2	0	1	0	0	8	~
X ₂	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5	5
S ₃	0	6	5	0	0	1	30	6

Keterangan :

- KAKK (koefisien angka kolom kunci) adalah yang diberi warna kuning.
- NBBK (nilai baru baris kunci) adalah yang diberi warna biru.

Dari penjelasan tersebut diperoleh :

- Baris baru Z

Baris lama	-3	-5	0	0	0	0	
KAKK x NBBK	-5 [0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5]
Baris baru Z	-3	0	0	$\frac{5}{3}$	0	25	

- Baris baru S₁

Baris lama	2	0	1	0	0	8	
KAKK x NBBK	0 [0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5]
Baris baru S ₁	2	0	1	0	0	8	

- Baris baru S₃

Baris lama	6	5	0	0	1	30	
KAKK x NBBK	5 [0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5]

Baris baru S_3 6 0 0 $-\frac{5}{3}$ 1 5

Masukkan nilai baru Z, S_1 , dan S_3 ke dalam tabel simpleks sebagai berikut :

VD	Z	X_1	S_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	1	-3	0	0	$\frac{5}{3}$	0	25	
S_1	0	2	0	1	0	0	8	
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5	
S_3	0	6	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	5	

Keterangan : Solusi belum optimal karena masih ada nilai negatif di baris Z (baris fungsi tujuan)

- Ulangi langkah di atas (3 – 6), sampai tidak terdapat nilai negatif pada baris Z (baris fungsi tujuan)

Catatan :

Iterasi berhenti jika tabel sudah optimal, jika :

- Semua nilai pada baris Z bernilai positif atau nol (untuk maksimasi).
- Bernilai negatif atau nol (untuk minimasi)

Hasil iterasi 2 :

➤ Langkah 3 dan 4

VD	Z	X_1	S_2	S_1	S_2	S_3	NK	Indeks
Z	1	-3	0	0	$\frac{5}{3}$	0	25	
S_1	0	2	0	1	0	0	8	4
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5	~
S_3	0	6	0	0	$-\frac{5}{3}$	1	5	$\frac{5}{6}$

Keterangan :

- Kolom berwarna kuning (kolom X_1) dipilih sebagai kolom kunci.
- Baris berwarna hijau (baris S_3) dipilih sebagai baris kunci.

➤ Langkah 5 dan 6

VD	Z	X ₁	S ₂	S ₁	S ₂	S ₃	NK	Indeks
Z	1	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$27\frac{1}{2}$	
S ₁	0	0	0	1	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{3}$	
X ₂	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	5	
X ₁	0	1	0	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	

Keterangan :

- Karena nilai pada baris Z (baris fungsi tujuan) sudah tidak ada yang bernilai negatif maka solusi optimal sudah diperoleh.
- Nilai solusi optimal dapat dilihat pada kolom NK (yang berwarna merah), yaitu :

$$Z_{\text{maks}} = 27\frac{1}{2}, X_1 = \frac{5}{6}, X_2 = 5$$