

# Kalkulus - fungsi -

Nurul Hilda SP, S.Pd., M.Si





# Definisi fungsi!

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota  $x$  dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal  $f(x)$  dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (range). Untuk mendefinisikan fungsi dapat dimisalkan menggunakan notasi berikut,  $f : A \rightarrow B$





# Jenis-jenis fungsi

1

Fungsi linier

2

Fungsi kuadrat  
(Parabola)

3

Fungsi lingkaran

4

Fungsi invers

5

Komposisi fungsi





# Contoh soal

Diberikan fungsi  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ , tentukan:

- $f(1)$
- $f(a + 2)$
- $f(a^2)$

## Penyelesaian

- a.  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ,
- $$f(1) = 1^2 - 2(1) + 2$$
- $$= 1 - 2 + 2 = 1$$
- b.  $f(a + 2) = (a + 2)^2 - 2(a + 2) + 2$
- $$= (a)^2 + 4a + 4 - 2a - 4 + 2$$
- $$= (a)^2 + 2a + 2$$
- c.  $f(a^2) = (a^2)^2 - 2a^2 + 2$
- $$= (a)^4 - 2a^2 + 2$$





*Fungsi linear*



## Fungsi Linear

“

Grafik fungsi linier dapat digambarkan cukup hanya dengan menentukan dua buah titik saja dan kedua titik tersebut dihubungkan sehingga membentuk sebuah garis lurus.

Persamaannya adalah  $f(x) = a(x) + b$

”

-Rs





## Contoh soal

Tentukan titik potong antara kedua persamaan fungsi linear  $x + y = 2$  dengan  $x - y = 4$ . Gambarkan grafiknya.

## Penyelesaian

Kedua persamaan tersebut bisa bertemu pada satu titik jika fungsinya disamakan dengan cara substitusi atau eliminasi.

$$x + y = 2 \dots (1)$$

$$x - y = 4 \dots (2)$$

Nyatakan ... (1) dalam variabel  $y$ , sehingga

$$x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x \dots (3)$$

Substitusi ... (3) ke ... (2)

$$x - y = 4$$

$$x - (2 - x) = 4$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$



# Penyelesaian

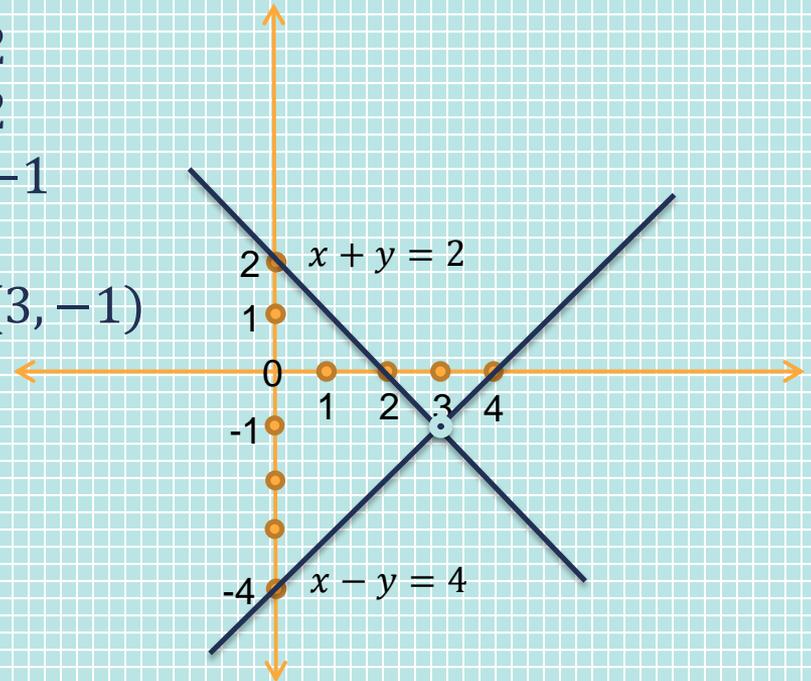
Tentukan nilai  $y$ , dengan mensubstitusi nilai  $x$  yang diperoleh, bisa menggunakan ... (1) atau ... (2)

$$x + y = 2$$

$$3 + y = 2$$

$$y = -1$$

Jadi titik potong kedua garis adalah  $(3, -1)$





## Soal

Tentukan titik potong antara kedua persamaan fungsi linear  $5x + 2y = 14$  dengan  $3x - 4y = 24$ . Gambarkan grafiknya.





*Fungsi Kuadrat  
(Parabola)*

# Fungsi kuadrat (parabola)



Bentuk umum fungsi parabola adalah

$$y = ax^2 + bx + c$$

dengan

$a, b$  sebagai koefisien dan  $c$  adalah konstanta,

$$a, b \text{ dan } c \in \mathbb{R}$$

Parabola memiliki titik puncak  $(x_p, y_p)$ , dengan:

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

$$y_p = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$





## Contoh soal

Tentukan koordinat titik potong fungsi  $x + y = 3$  dengan fungsi  $x^2 - 2x + y = 1$ .

### Penyelesaian

Kedua persamaan tersebut bisa bertemu pada satu titik jika fungsinya disamakan dengan cara substitusi atau eliminasi.

$$x + y = 3 \dots (1)$$

$$x^2 - 2x + y = 1 \dots (2)$$

Nyatakan ... (1) dalam variabel  $y$ , sehingga

$$x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x \dots (3)$$

Substitusi ... (3) ke ... (2)

$$x^2 - 2x + 3 - x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$





Maka diperoleh akar-akarnya  $x = 1$  dan  $x = 2$

Substitusi nilai  $x = 1$  ke persamaan

$$y = 3 - 1$$

$$y = 2$$

dan Substitusi nilai  $x = 2$  ke persamaan

$$y = 3 - 2$$

$$y = 1$$

Jadi koordinat titik potong kedua garis adalah  $(1,2)$  dan  $(2,1)$





## Soal

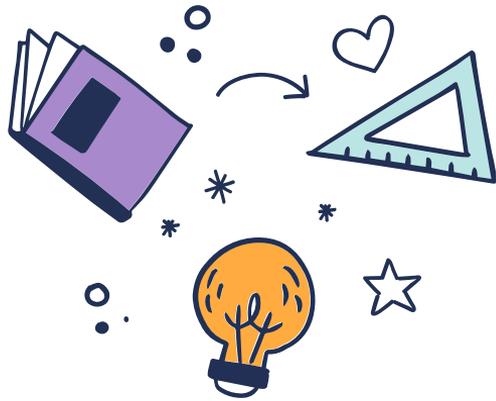
Jika grafik kuadrat  $y =$  dengan  $3x - 4y = 24$ . Gambarkan grafiknya.



# Fungsi Lingkaran



# Fungsi Lingkaran



Menggunakan persamaan jarak antara dua titik  
maka persamaan umum lingkaran adalah

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

atau

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r^2$$





## Contoh soal

Tentukan titik pusat dan r dari persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ .

### Penyelesaian

Kelompokkan masing-masing  $x$  dan  $y$

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Pindahkan konstanta 1 ke ruas kanan

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 1.$$

Bentuk dalam persamaan kuadrat

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 1 + 9 + 1$$

Sehingga

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 11$$

Maka jari-jari atau radius nya adalah  $\sqrt{11}$  dan titik pusat di  $(3, -1)$





## Soal

Tentukan titik pusat dan radius dari persamaan lingkaran

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0.$$


# Fungsi invers



# Sifat-sifat fungsi Invers...



$$y = f^{-1}(x). \text{ Maka } x = f(y)$$

1

4

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ untuk semua } x \text{ dalam domain } f$$

Domain dari  $f^{-1}$  adalah range dari  $f$

2

5

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ untuk semua } x \text{ dalam domain } f^{-1}$$

Range dari  $f^{-1}$  adalah domain dari  $f$

3

6

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \text{ untuk semua } x \text{ dalam domain } f$$

7

Grafik  $f^{-1}$  dicerminkan dari grafik  $f$  terhadap garis  $x = y$





## Contoh soal

Tentukan invers dari fungsi  $f(x) = \frac{4-6x}{8x+6}$

## Penyelesaian

Misalkan

$$\begin{aligned}f(x) = y &= \frac{4 - 6x}{8x + 6} \\y(8x + 6) &= 4 - 6x \\8xy - 6y &= 4 - 6x \\8xy - 6x &= 4 - 6y \\x(8y + 6) &= 4 - 6y \\x &= \frac{4 - 6y}{8y + 6}\end{aligned}$$





## Lanjutan Penyelesaian

Gantikan  $x$  dengan  $y$ , sehingga:

$$y^{-1} = \frac{4 - 6x}{8x + 6}$$

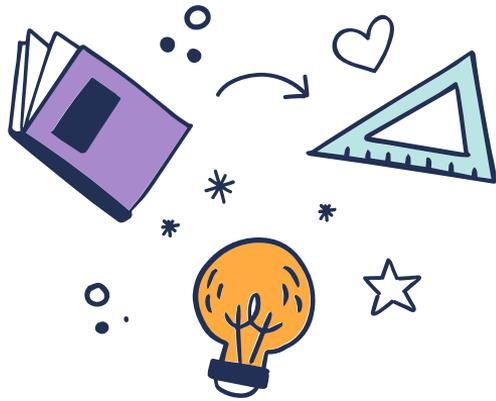
Jadi invers dari fungsi  $f(x) = \frac{4-6x}{8x+6}$  adalah  $f(x)^{-1} = \frac{4-6x}{8x+6}$





# *Komposisi Fungsi*

# Komposisi Fungsi



Komposisi fungsi atau fungsi komposisi merupakan penggabungan dua fungsi sehingga menghasilkan fungsi baru.

## Rumus Komposisi Fungsi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

## Sifat-sifat Komposisi Fungsi

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$





## Contoh soal

Tentukan komposisi fungsi  $(f \circ g)(x)$  dan  $(g \circ f)(x)$  untuk

$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ dan } g(x) = 4 - 3x^2$$

### Penyelesaian

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (4 - 3x^2)^2 - (4 - 3x^2) + 1 \\ &= 16 - 24x^2 + 9x^4 - 4 + 3x^2 + 1 \\ &= 9x^4 - 21x^2 + 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 4 - 3(x^2 - x + 1)^2 \\ &= 4 - 3(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= 4 - 3(x^4 - x^3 + x^2 - x^3 + x^2 - x + x^2 - x + 1) \\ &= 4 - 3(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) \\ &= -3x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$



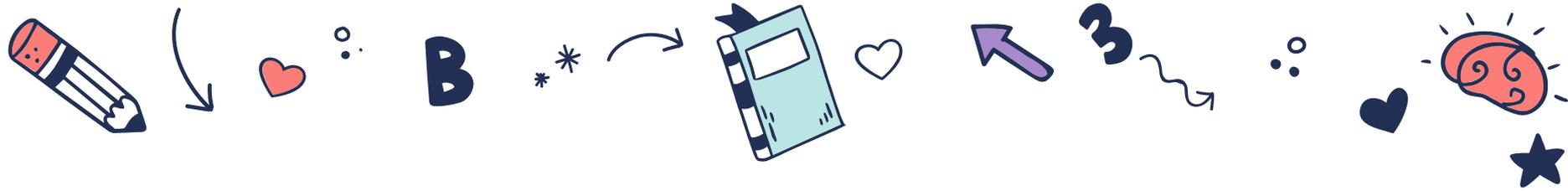


## Soal

Tentukan komposisi fungsi  $(f \circ g)(x)$  dan  $(g \circ f)(x)$  untuk

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = 2x + 1$$





2

Thankyou



A



2x2

1

